Esercizio 1

$[x := a+b]^1$; $[y := a \cdot b]^2$; while $[y > a+b]^3$ do ($[a := a+1]^4$; $[x := a+b]^5$)

labels(S)* = {1, 2, 3, 4, 5}

init(S)* = 1

final(S)* = {3}

flow(S)* = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 3), (4, 5)}

$flow^R(S_*)$ = {(2, 1), (3, 2), (4, 3), (3, 5), (5, 4)}

$\mathbf{Var}_*$ = {a, b, x, y}

$\mathbf{AExp}_*$ = {(a+b), (a·b), (a+1)}

$\mathbf{BExp}_*$ = {(y > a+b)}

P($\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?$) = {(x, ?), (x, 1), (x, 5), (y, ?), (y, 2), (a, ?), (a, 4), (b, ?)}

Available Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{AE}(l)$	$gen_{AE}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$
1	$\emptyset$	{(a+b)}	$\emptyset$	$(\emptyset \setminus \emptyset) \cup$ {(a+b)}	$\emptyset$	{(a+b)}
2	$\emptyset$	{(a·b)}	$AE_{exit}(1)$	$(AE_{exit}(1) \setminus \emptyset) \cup$ {(a·b)}	{(a+b)}	{(a+b), (a·b)}
3	$\emptyset$	{(a+b)}	$AE_{exit}(2) \cap AE_{exit}(5)$	$(AE_{exit}(2) \cap AE_{exit}(5) \setminus \emptyset) \cup$ {(a+b)}	{(a+b)}	{(a+b)}
4	{(a+b), (a·b), (a+1)}	$\emptyset$	$AE_{exit}(3)$	$(AE_{exit}(3) \setminus$ {(a+b), (a·b), (a+1)}$) \cup \emptyset$	{(a+b)}	$\emptyset$
5	$\emptyset$	{(a+b)}	$AE_{exit}(4)$	$(AE_{exit}(4) \setminus \emptyset) \cup$ {(a+b)}	$\emptyset$	{(a+b)}

Reaching Definitions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}^?_*), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}^?_*)$

l	$kill_{RD}(l)$	$gen_{RD}(l)$	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(x, ?), (x, 1), (x, 5)}	{(x, 1)}	{(x, ?), (y, ?), (a, ?)}	({(x, ?), (y, ?), (a, ?)} \ {(x, ?), (x, 1), (x, 5)}) ∪ {(x, 1)}
2	{(y, ?), (y, 2)}	{(y, 2)}	$RD_{exit}(1)$	$(RD_{exit}(1)$ \ {(y, ?), (y, 2)}) ∪ {(y, 2)}
3	∅	∅	$RD_{exit}(2) \cup RD_{exit}(5)$	$(RD_{exit}(2) \cup RD_{exit}(5) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$
4	{(a, ?), (a, 4)}	{(a, 4)}	$RD_{exit}(3)$	$(RD_{exit}(3)$ \ {(a, ?), (a, 4)}) ∪ {(a, 4)}
5	{(x, ?), (x, 1), (x, 5)}	{(x, 5)}	$RD_{exit}(4)$	$(RD_{exit}(4)$ \ {(x, ?), (x, 1), (x, 5)}) ∪ {(x, 5)}

l	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(x, ?), (y, ?), (a, ?)}	{(y, ?), (a, ?), (x, 1)}
2	{(y, ?), (a, ?), (x, 1)}	{(a, ?), (x, 1), (y, 2)}
3	{(a, ?), (x, 1), (y, 2), (x, 5), (a, 4)}	{(a, ?), (x, 1), (y, 2), (x, 5), (a, 4)}
4	{(a, ?), (x, 1), (y, 2), (x, 5), (a, 4)}	{(x, 1), (y, 2), (x, 5), (a, 4)}
5	{(x, 1), (y, 2), (x, 5), (a, 4)}	{(y, 2), (x, 5), (a, 4)}

Very Busy Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{VB}(l)$	$gen_{VB}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$
1	∅	{(a+b)}	$(VB_{entry}(2) \setminus \emptyset)$ ∪ {(a+b)}	$VB_{entry}(2)$	{(a+b), (a·b)}	{(a+b), (a·b)}
2	∅	{(a·b)}	$(VB_{entry}(3) \setminus \emptyset)$ ∪ {(a·b)}	$VB_{entry}(3)$	{(a+b), (a·b)}	{(a+b)}
3	∅	{(a+b)}	(∅ \ ∅) ∪ {(a+b)}	∅	{(a+b)}	∅
4	{(a+1), (a+b), (a·b)}	{(a+1)}	$(VB_{entry}(5)$ \ {(a+1), (a+b), (a·b)}) ∪ {(a+1)}	$VB_{entry}(5)$	{(a+1)}	{(a+b)}
5	∅	{(a+b)}	$(VB_{entry}(3) \setminus \emptyset)$ ∪ {(a+b)}	$VB_{entry}(3)$	{(a+b)}	{(a+b)}

Live Variables Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{Var}_*), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_*)$

l	$kill_{LV}(l)$	$gen_{LV}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$
1	{x}	{a, b}	$(VB_{entry}(2)$ \ {x}) ∪ {a, b}	$VB_{entry}(2)$	{a, b}	{a, b}
2	{y}	{a, b}	$(VB_{entry}(3)$ \ {y}) ∪ {a, b}	$VB_{entry}(3)$	{a, b}	{y, a, b}
3	∅	{y, a, b}	(∅ \ ∅) ∪ {y, a, b}	∅	{y, a, b}	∅
4	{a}	{a}	$(VB_{entry}(5)$ \ {a}) ∪ {a}	$VB_{entry}(5)$	{y, a, b}	{y, a, b}
5	{x}	{a, b}	$(VB_{entry}(3)$ \ {x}) ∪ {a, b}	$VB_{entry}(3)$	{y, a, b}	{y, a, b}

Esercizio 2

$[x := 5]^1$; $[y := 1]^2$; while $[x > 1]^3$ do ($[y := x \cdot y]^4$; $[x := x-1]^5$)

$labels(S_*) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$init(S_*) = 1$

$final(S_*) = \{3\}$

$flow(S_*) = \{(1, 2), (2, 3), (5, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

$flow^R(S_*) = \{(2, 1), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 4)\}$

$\mathbf{Var}_* = \{x, y\}$

$\mathbf{AExp}_* = \{(x \cdot y), (x-1)\}$

$\mathbf{BExp}_* = \{(x > 1)\}$

$P(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?) = \{(x, ?), (x, 1), (x, 5), (y, ?), (y, 2), (y, 4)\}$

Available Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \bot, \top) = (P(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{AE}(l)$	$gen_{AE}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$
1	$\{(x \cdot y), (x-1)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(\emptyset \setminus \{(x \cdot y), (x-1)\}) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{(x \cdot y)\}$	$\emptyset$	$AE_{exit}(1)$	$(AE_{exit}(1) \setminus \{(x \cdot y)\}) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$AE_{exit}(2) \cap AE_{exit}(5)$	$(AE_{exit}(2) \cap AE_{exit}(5) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\{(x \cdot y)\}$	$\emptyset$	$AE_{exit}(3)$	$(AE_{exit}(3) \setminus \{(x \cdot y)\}) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\{(x \cdot y), (x-1)\}$	$\emptyset$	$AE_{exit}(4)$	$(AE_{exit}(4) \setminus \{(x \cdot y), (x-1)\}) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Reaching Definitions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?)$

l	$kill_{RD}(l)$	$gen_{RD}(l)$	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(x, ?), (x, 1), (x, 5)}	{(x, 1)}	{(x, ?), (y, ?)}	({(x, ?), (y, ?)} \ {(x, ?), (x, 1), (x, 5)}) ∪ {(x, 1)}
2	{(y, ?), (y, 2), (y, 4)}	{(y, 2)}	$RD_{exit}(1)$	$(RD_{exit}(1)$ \ {(y, ?), (y, 2), (y, 4)}) ∪ {(y, 2)}
3	∅	∅	$RD_{exit}(2) \cup RD_{exit}(5)$	$(RD_{exit}(2) \cup RD_{exit}(5) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$
4	{(y, ?), (y, 2), (y, 4)}	{(y, 4)}	$RD_{exit}(3)$	$(RD_{exit}(3)$ \ {(y, ?), (y, 2), (y, 4)}) ∪ {(y, 4)}
5	{(x, ?), (x, 1), (x, 5)}	{(x, 5)}	$RD_{exit}(4)$	$(RD_{exit}(4)$ \ {(x, ?), (x, 1), (x, 5)}) ∪ {(x, 5)}

l	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(x, ?), (y, ?)}	{(y, ?), (x, 1)}
2	{(y, ?), (x, 1)}	{(x, 1), (y, 2)}
3	{(x, 1), (x, 5), (y, 2), (y, 4)}	{(x, 1), (x, 5), (y, 2), (y, 4)}
4	{(x, 1), (x, 5), (y, 2), (y, 4)}	{(x, 1), (x, 5), (y, 4)}
5	{(x, 1), (x, 5), (y, 4)}	{(x, 5), (y, 4)}

Very Busy Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{VB}(l)$	$gen_{VB}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$
1	{(x·y), (x-1)}	∅	$(VB_{entry}(2)$ \ {(x·y), (x-1)}) ∪ ∅	$VB_{entry}(2)$	∅	∅
2	{(x·y)}	∅	$(VB_{entry}(3)$ \ {(x·y)}) ∪ ∅	$VB_{entry}(3)$	∅	∅
3	∅	∅	(∅ \ ∅) ∪ ∅	∅	∅	∅
4	{(x·y)}	{(x·y)}	$(VB_{entry}(5)$ \ {(x·y)}) ∪ {(x·y)}	$VB_{entry}(5)$	{(x·y), (x-1)}	{(x-1)}
5	{(x·y), (x-1)}	{(x-1)}	$(VB_{entry}(3)$ \ {(x·y), (x-1)}) ∪ {(x-1)}	$VB_{entry}(3)$	{(x-1)}	∅

Live Variables Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{Var}_*), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_*)$

l	$kill_{LV}(l)$	$gen_{LV}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$
1	{x}	∅	$(LV_{entry}(2)$ \ {x}) ∪ ∅	$LV_{entry}(2)$	∅	{x}
2	{y}	∅	$(LV_{entry}(3)$ \ {y}) ∪ ∅	$LV_{entry}(3)$	{x}	{x}
3	∅	{x}	(∅ \ ∅) ∪ {x}	∅	{x}	∅
4	{y}	{x, y}	$(LV_{entry}(5)$ \ {y}) ∪ {x, y}	$LV_{entry}(5)$	{x, y}	{x}
5	{x}	{x}	$(LV_{entry}(3)$\ {x}) ∪ {x}	$LV_{entry}(3)$	{x}	{x}

Esercizio 3

if $[a>b]^1$ then ($[x := b\text{-}a]^2$; $[y := a\text{-}b]^3$) else ($[y := b\text{-}a]^4$; $[x := a\text{-}b]^5$)

$labels(S_*) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$init(S_*) = 1$

$final(S_*) = \{3, 5\}$

$flow(S_*) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 5)\}$

$flow^R(S_*) = \{(2, 1), (4, 1), (3, 2), (5, 4)\}$

$\mathbf{Var}_* = \{a, b, x, y\}$

$\mathbf{AExp}_* = \{(b\text{-}a), (a\text{-}b)\}$

$\mathbf{BExp}_* = \{(a>b)\}$

$P(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?) = \{(x, ?), (x, 2), (x, 5), (y, ?), (y, 3), (y, 4)\}$

Available Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{AE}(l)$	$gen_{AE}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{(b\text{-}a)\}$	$AE_{exit}(1)$	$(AE_{entry}(2) \setminus \emptyset) \cup \{(b\text{-}a)\}$	$\emptyset$	$\{(b\text{-}a)\}$
3	$\emptyset$	$\{(a\text{-}b)\}$	$AE_{exit}(2)$	$(AE_{entry}(3) \setminus \emptyset) \cup \{(a\text{-}b)\}$	$\{(b\text{-}a)\}$	$\{(b\text{-}a), (a\text{-}b)\}$
4	$\emptyset$	$\{(b\text{-}a)\}$	$AE_{exit}(1)$	$(AE_{entry}(4) \setminus \emptyset) \cup \{(b\text{-}a)\}$	$\emptyset$	$\{(b\text{-}a)\}$
5	$\emptyset$	$\{(a\text{-}b)\}$	$AE_{exit}(4)$	$(AE_{entry}(5) \setminus \emptyset) \cup \{(a\text{-}b)\}$	$\{(b\text{-}a)\}$	$\{(b\text{-}a), (a\text{-}b)\}$

Reaching Definitions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?)$

l	$kill_{RD}(l)$	$gen_{RD}(l)$	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(x, ?), (y, ?)\}$	$(\{(x, ?), (y, ?)\} \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\{(x, ?), (y, ?)\}$	$\{(x, ?), (y, ?)\}$
2	$\{(x, ?), (x, 2), (x, 5)\}$	$\{(x, 2)\}$	$RD_{exit}(1)$	$(RD_{entry}(2) \setminus \{(x, ?), (x, 2), (x, 5)\}) \cup \{(x, 2)\}$	$\{(x, ?), (y, ?)\}$	$\{(y, ?), (x, 2)\}$
3	$\{(y, ?), (y, 3), (y, 4)\}$	$\{(y, 3)\}$	$RD_{exit}(2)$	$(RD_{entry}(3) \setminus \{(y, ?), (y, 3), (y, 4)\}) \cup \{(y, 3)\}$	$\{(y, ?), (x, 2)\}$	$\{(x, 2), (y, 3)\}$
4	$\{(y, ?), (y, 3), (y, 4)\}$	$\{(y, 4)\}$	$RD_{exit}(1)$	$(RD_{entry}(4) \setminus \{(y, ?), (y, 3), (y, 4)\}) \cup \{(y, 4)\}$	$\{(x, ?), (y, ?)\}$	$\{(x, ?), (y, 4)\}$
5	$\{(x, ?), (x, 2), (x, 5)\}$	$\{(x, 5)\}$	$RD_{exit}(4)$	$(RD_{entry}(5) \setminus \{(x, ?), (x, 2), (x, 5)\}) \cup \{(x, 5)\}$	$\{(x, ?), (y, 4)\}$	$\{(y, 4), (x, 5)\}$

Very Busy Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{VB}(l)$	$gen_{VB}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$(VB_{entry}(2) \cap VB_{entry}(4) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$VB_{entry}(2) \cap VB_{entry}(4)$	{(a-b), (b-a)}	{(a-b), (b-a)}
2	$\emptyset$	{(b-a)}	$(VB_{entry}(3) \setminus \emptyset) \cup$ {(b-a)}	$VB_{entry}(3)$	{(a-b), (b-a)}	{(a-b)}
3	$\emptyset$	{(a-b)}	$(\emptyset \setminus \emptyset) \cup$ {(a-b)}	$\emptyset$	{(a-b)}	$\emptyset$
4	$\emptyset$	{(b-a)}	$(VB_{entry}(5) \setminus \emptyset) \cup$ {(b-a)}	$VB_{entry}(5)$	{(a-b), (b-a)}	{(a-b)}
5	$\emptyset$	{(a-b)}	$(\emptyset \setminus \emptyset) \cup$ {(a-b)}	$\emptyset$	{(a-b)}	$\emptyset$

Live Variables Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{Var}_*), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_*)$

l	$kill_{LV}(l)$	$gen_{LV}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$
1	$\emptyset$	{a, b}	$(LV_{entry}(2) \cup LV_{entry}(4) \setminus \emptyset) \cup \{a, b\}$	$LV_{entry}(2) \cup LV_{entry}(4)$	{a, b}	{a, b}
2	{x}	{a, b}	$(LV_{entry}(3) \setminus \{x\}) \cup \{a, b\}$	$LV_{entry}(3)$	{a, b}	{a, b}
3	{y}	{a, b}	$(\emptyset \setminus \{y\}) \cup \{a, b\}$	$\emptyset$	{a, b}	$\emptyset$
4	{y}	{a, b}	$(LV_{entry}(5) \setminus \{y\}) \cup \{a, b\}$	$LV_{entry}(5)$	{a, b}	{a, b}
5	{x}	{a, b}	$(\emptyset \setminus \{x\}) \cup \{a, b\}$	$\emptyset$	{a, b}	$\emptyset$

Esercizio 4

$[x := 2]^1$; $[y := 4]^2$; $[x := 1]^3$; (if $[y>x]^4$ then $[z := y]^5$ else $[z := y \cdot y]^6$); $[x := z]^7$

$labels(S_*) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$init(S_*) = 1$

$final(S_*) = \{7\}$

$flow(S_*) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 7)\}$

$flow^R(S_*) = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 4), (7, 5), (7, 6)\}$

$\mathbf{Var}_* = \{x, y, z\}$

$\mathbf{AExp}_* = \{(y \cdot y)\}$

$\mathbf{BExp}_* = \{(y > x)\}$

$P(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?) = \{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x, 7), (y, ?), (y, 2), (z, ?), (z, 5), (z, 6)\}$

Available Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{AE}(l)$	$gen_{AE}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$	$AE_{entry}(l)$	$AE_{exit}(l)$
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(\emptyset \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{(y \cdot y)\}$	$\emptyset$	$AE_{exit}(1)$	$(AE_{exit}(1) \setminus \{(y \cdot y)\}) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$AE_{exit}(2)$	$(AE_{exit}(2) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\emptyset$	$AE_{exit}(3)$	$(AE_{exit}(3) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\emptyset$	$\emptyset$	$AE_{exit}(4)$	$(AE_{exit}(4) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
6	$\emptyset$	$\{(y \cdot y)\}$	$AE_{exit}(4)$	$(AE_{exit}(4) \setminus \emptyset) \cup \{(y \cdot y)\}$	$\emptyset$	$\{(y \cdot y)\}$
7	$\emptyset$	$\emptyset$	$AE_{exit}(5) \cap AE_{exit}(6)$	$(AE_{exit}(5) \cap AE_{exit}(6) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Reaching Definitions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \bot, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?)$

l	$kill_{RD}(l)$	$gen_{RD}(l)$	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x,7)}	{(x, 1)}	{(x, ?), (y, ?), (z, ?)}	$(\{(x, ?), (y, ?), (z, ?)\} \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x,7)\}) \cup \{(x, 1)\}$
2	{(y, ?), (y, 2)}	{(y, 2)}	$RD_{exit}(1)$	$(RD_{exit}(1) \setminus \{(y, ?), (y, 2)\}) \cup \{(y, 2)\}$
3	{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x,7)}	{(x, 3)}	$RD_{exit}(2)$	$(RD_{exit}(2) \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x,7)\}) \cup \{(x, 3)\}$
4	∅	∅	$RD_{exit}(3)$	$(RD_{exit}(3) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$
5	{(z, ?), (z, 5), (z, 6)}	{(z, 5)}	$RD_{exit}(4)$	$(RD_{exit}(4) \setminus \{(z, ?), (z, 5), (z, 6)\}) \cup \{(z, 5)\}$
6	{(z, ?), (z, 5), (z, 6)}	{(z, 6)}	$RD_{exit}(4)$	$(RD_{exit}(4) \setminus \{(z, ?), (z, 5), (z, 6)\}) \cup \{(z, 6)\}$
7	{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x,7)}	{(x, 7)}	$RD_{exit}(5) \cup RD_{exit}(6)$	$(RD_{exit}(5) \cup RD_{exit}(6) \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 3), (x,7)\}) \cup \{(x, 7)\}$

l	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(x, ?), (y, ?), (z, ?)}	{(y, ?), (z, ?), (x, 1)}
2	{(y, ?), (z, ?), (x, 1)}	{(y, 2), (z, ?), (x, 1)}
3	{(y, 2), (z, ?), (x, 1)}	{(y, 2), (z, ?), (x, 3)}
4	{(y, 2), (z, ?), (x, 3)}	{(y, 2), (z, ?), (x, 3)}
5	{(y, 2), (z, ?), (x, 3)}	{(y, 2), (z, 5), (x, 3)}
6	{(y, 2), (z, ?), (x, 3)}	{(y, 2), (z, 6), (x, 3)}
7	{(y, 2), (z, 5), (z, 6), (x, 3)}	{(y, 2), (z, 5), (z, 6), (x, 7)}

Very Busy Expressions Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \bot, \top) = (\mathcal{P}(\mathbf{AExp}_*), \supseteq, \cap, \mathbf{AExp}_*, \emptyset)$

l	$kill_{VB}(l)$	$gen_{VB}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$	$VB_{entry}(l)$	$VB_{exit}(l)$
1	∅	∅	$(VB_{exit}(2) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$VB_{exit}(2)$	∅	∅
2	{(y·y)}	∅	$(VB_{exit}(3) \setminus \{(y \cdot y)\}) \cup \emptyset$	$VB_{exit}(3)$	∅	∅
3	∅	∅	$(VB_{exit}(4) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$VB_{exit}(4)$	∅	∅
4	∅	∅	$(VB_{exit}(5) \cap VB_{exit}(6) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$VB_{exit}(5) \cap VB_{exit}(6)$	∅	∅
5	∅	∅	$(VB_{exit}(7) \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	$VB_{exit}(7)$	∅	∅
6	∅	{(y·y)}	$(VB_{exit}(7) \setminus \emptyset) \cup \{(y \cdot y)\}$	$VB_{exit}(7)$	{(y·y)}	∅
7	∅	∅	$(\emptyset \setminus \emptyset) \cup \emptyset$	∅	∅	∅

Live Variables Analysis

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (\mathrm{P}(\mathbf{Var}_*), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_*)$

l	$kill_{LV}(l)$	$gen_{LV}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$
1	{x}	$\emptyset$	$(LV_{entry}(2) \setminus \{x\}) \cup \emptyset$	$LV_{entry}(2)$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	{y}	$\emptyset$	$(LV_{entry}(3) \setminus \{y\}) \cup \emptyset$	$LV_{entry}(3)$	$\emptyset$	{y}
3	{x}	$\emptyset$	$(LV_{entry}(4) \setminus \{x\}) \cup \emptyset$	$LV_{entry}(4)$	{y}	{x, y}
4	$\emptyset$	{x, y}	$(LV_{entry}(5) \cup LV_{entry}(6) \setminus \emptyset) \cup \{x, y\}$	$LV_{entry}(5) \cup LV_{entry}(6)$	{x, y}	{y}
5	{z}	{y}	$(LV_{entry}(7) \setminus \{z\}) \cup \{y\}$	$LV_{entry}(7)$	{y}	{z}
6	{z}	{y}	$(LV_{entry}(7) \setminus \{z\}) \cup \{y\}$	$LV_{entry}(7)$	{y}	{z}
7	{x}	{z}	$(\emptyset \setminus \{x\}) \cup \{z\}$	$\emptyset$	{z}	$\emptyset$

Esercizio 5

$((\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2\ (\text{fn } y \Rightarrow y^3)^4)^5$

Abstract Control Flow Analysis

$((\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2\ (\text{fn } y \Rightarrow y^3)^4)^5$

Trovo i vincoli (constraints) utilizzando la tabella 3.1 di pag 146 del libro PPA.

[app]

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models (\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2$

[fn]

[1] $\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq \hat{C}(2)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models (\text{fn } y \Rightarrow y^3)^4$

[fn]

[2] $\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq \hat{C}(4)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models x^1$

[3] [var] $\hat{\rho}(x) \subseteq \hat{C}(1)$

[4] $\hat{C}(4) \subseteq \hat{\rho}(x)$

[5] $\hat{C}(1) \subseteq \hat{C}(5)$

Scrivo una soluzione ammissibile:

ordine di costruzione	*vincoli*		$(\hat{C}, \hat{\rho})$
4	**[3]**[5]	1	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
1	**[1]**	2	$\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\}$
-	-	3	$\emptyset$
2	**[2]**[4]	4	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
5	**[5]**	5	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
3	[3]**[4]**	x	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
-	-	y	$\emptyset$

In assenza di vincoli, scelgo l'insieme più piccolo, ovvero quello vuoto.

Syntax directed Control Flow Analysis

`((fn x => x¹)² (fn y => y³)⁴)⁵`

Trovo i vincoli (constraints) utilizzando la tabella 3.5 di pag 170 del libro PPA.

[app]

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models_s (\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2$

[fn]

[1] $\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq \hat{C}(2)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models_s x^1$

[var]

[2] $\hat{\rho}(x) \subseteq \hat{C}(1)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models_s (\text{fn } y \Rightarrow y^3)^4$

[fn]

[3] $\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq \hat{C}(4)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \models_s y^3$

[var]

[4] $\hat{\rho}(y) \subseteq \hat{C}(3)$

[5] $\hat{C}(4) \subseteq \hat{\rho}(x)$

[6] $\hat{C}(1) \subseteq \hat{C}(5)$

Scrivo una soluzione ammissibile:

ordine di costruzione	*vincoli*		$(\hat{C}, \hat{\rho})$
4	**[2]**[6]	1	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
1	**[1]**	2	$\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\}$
7	**[4]**	3	$\emptyset$
2	**[3]**[5]	4	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
5	**[6]**	5	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
3	[2]**[5]**	x	$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\}$
6	-	y	$\emptyset$

In assenza di vincoli, scelgo l'insieme più piccolo, ovvero quello vuoto.

Contraint based Control Flow Analysis

$((\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^1)^2\ (\mathtt{fn}\ y \Rightarrow y^3)^4)^5$

Trovo i vincoli (constraints) utilizzando la tabella 3.6 di pag 174 del libro PPA.

[app]

$C_*\langle(\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2\rangle$

[fn]

$\{\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq C(2)\}$

$\cup\ C_*\langle x^1\rangle$

[var]

$\{r(x) \subseteq C(1)\}$

$\cup\ C_*\langle(\text{fn } y \Rightarrow y^3)^4\rangle$

[fn]

$\{\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq C(4)\}$

$\cup\ C_*\langle y^3\rangle$

[var]

$\{r(y) \subseteq C(3)\}$

$\cup\ \{\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(4) \subseteq r(x)\}$

$\cup\ \{\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(4) \subseteq r(y)\}$

$\cup\ \{\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(1) \subseteq C(5)\}$

$\cup\ \{\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(3) \subseteq C(5)\}$

riscriviamo tutto:

$C_*\langle((\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2 (\text{fn } y \Rightarrow y^3)^4)^5\rangle = \{$

$\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq C(2),$

$r(x) \subseteq C(1),$

$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq C(4),$

$r(y) \subseteq C(3),$

$\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(4) \subseteq r(x),$

$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(4) \subseteq r(y),$

$\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(1) \subseteq C(5),$

$\{\text{fn } y \Rightarrow y^3\} \subseteq C(2) \Rightarrow C(3) \subseteq C(5)$

$\}$

scrivo la tabella di inizializzazione per l'agoritmo di risoluzione nel seguente modo:

- **D[p]** = $\{t \mid (\{t\} \subseteq p) \in C_*[e_*]\}$
- un vincolo $p_1 \subseteq p_2$ crea un edge da p_1 a p_2
- un vincolo $\{t\} \subseteq p \Rightarrow p_1 \subseteq p_2$ crea un edge da p_1 a p_2 e un edge da p a p_2

p	**D[p]**	**E[p]**
C(1)	∅	[{fn x => x^1} ⊆ C(2) ⇒ C(1) ⊆ C(5)]
C(2)	{fn x => x^1}	[{fn x => x^1} ⊆ C(2) ⇒ C(4) ⊆ r(x), {fn y => y^3} ⊆ C(2) ⇒ C(4) ⊆ r(y), {fn x => x^1} ⊆ C(2) ⇒ C(1) ⊆ C(5), {fn y => y^3} ⊆ C(2) ⇒ C(3) ⊆ C(5)]
C(3)	∅	[{fn y => y^3} ⊆ C(2) ⇒ C(3) ⊆ C(5)]
C(4)	{fn y => y^3}	[{fn x => x^1} ⊆ C(2) ⇒ C(4) ⊆ r(x), {fn y => y^3} ⊆ C(2) ⇒ C(4) ⊆ r(y)]
C(5)	∅	[]
r(x)	∅	[r(x) ⊆ C(1)]
r(y)	∅	[r(y) ⊆ C(3)]

D =data array : for each node gives an element of $\widehat{\textbf{Val}}_*$.

E = edge array: for each node gives a list of constraints from wich a list of the successors nodes can be computed.

Esercizio 6

(vedi esercizio 4.1 pag 276 del libro di testo)

(Sign', $\sqsubseteq$)

$z \in Z$; $s' \in Sign'$

definisco la funzione di rappresentazione:

$\beta_{zs'} : Z \to Sign'$

$\beta_{zs'}(z) =$ - se $z < 0$

0 se $z = 0$

+ se $z > 0$

costruisco la relazione di correttezza utilizzando la funzione di rappresentazione:

$Rzs' : Z \times Sign' \to \{true, false\}$

$Rzs'(z, s') =$ true se $\beta_{zs'}(z) \sqsubseteq s'$

false altrimenti

verifico la proprietà 4.4 di pag. 214:

$(z\ R\ s_1') \wedge (s_1' \sqsubseteq s_2') \Rightarrow (z\ R\ s_2')$

sostituisco:

$(\beta_{zs'}(z) \sqsubseteq s_1') \wedge (s_1' \sqsubseteq s_2') \Rightarrow (\beta_{zs'}(z) \sqsubseteq s_2')$

è banalmente verificata dalla seguente osservazione:

$\beta_{zs'}(z) \sqsubseteq s_1' \sqsubseteq s_2'$

verifico la proprietà 4.5 di pag. 214:

$(\forall s'' \in Sign'' \subseteq Sign' : z\ R\ s'') \Rightarrow z\ R\ (\sqcap Sign'')$

se la relazione $(z\ R\ s'')$ *è soddisfatta per ogni* s'' *appartenente a* Sign''*, allora anche la relazione* $(z\ R\ (\sqcap Sign''))$ *è soddisfatta poiché* $(\sqcap Sign'')$ *appartiene a* Sign''.

verifico la relazione tra la funzione di rappresentazione e la relazione di correttezza:

$\beta_{zs'}(z) = \sqcap\{s' \mid z\ R\ s'\}$

infatti, sostituendo si ha:

$\beta_{zs'}(z) =$ $- = \sqcap\{-, -0\}$ se $z < 0$

$0 = \sqcap\{-0, 0, 0+\}$ se $z = 0$

$+ = \sqcap\{+, 0+\}$ se $z > 0$

Esercizio 7

(vedi esercizio 4.10 pag 278 del libro di testo)

Let $(l_n)_n$ be a descending chain and let $\Delta : L \times L \rightarrow L$ be a total function that satisfies $l'_2 \sqsubseteq l'_1 \Rightarrow l'_2 \sqsubseteq (l'_1 \, \Delta \, l'_2) \sqsubseteq l'_1$ for all $l'_1, l'_2 \in L$. Show that the sequence $(l^{\Delta}_n)_n$ is a descending chain and that $l^{\Delta}_n \sqsupseteq l_n$ for all n.

Soluzione

per n=0 :

$l^{\Delta}_0 = l_0$ *(discende dalla definizione di narrowing)*

$l_0 \sqsupseteq l_1$ *(più in generale vale:* $l_n \sqsupseteq l_{n+1}$*)*

per soddisfare le condizioni date, deve valere:

$l^{\Delta}_0 \sqsupseteq (l^{\Delta}_0 \, \Delta \, l_1) \sqsupseteq l_1$

dalla definizione di narrowing per n>0 ($l^{\Delta}_{n+1} = l^{\Delta}_n \, \Delta \, l_{n+1}$):

$l^{\Delta}_1 = l^{\Delta}_0 \, \Delta \, l_1$

questa ci permette di riscrivere la seconda parte della precedente come:

$l^{\Delta}_1 \sqsupseteq l_1$

al passo successivo, per n=1:

$l^{\Delta}_1 \sqsupseteq (l^{\Delta}_1 \, \Delta \, l_2) \sqsupseteq l_2$

ripetendo gli ultimi passi, per induzione discendono le seguenti:

$l^{\Delta}_n \sqsupseteq l_n$ *(questa vale quindi per ogni n)*

$l^{\Delta}_n \sqsupseteq l^{\Delta}_n \, \Delta \, l_{n+1} \sqsupseteq l_{n+1}$

usando la definizione di narrowing, riscriviamo la prima parte della precedente come:

$l^{\Delta}_n \sqsupseteq l^{\Delta}_{n+1}$

quest'ultima è proprio la condizione che descrive le catene discendenti.

Esercizio 8

(vedi esercizio 4.19 pag 280 del libro di testo)

Date le seguenti inserzioni di Galois:

$(L, \alpha_1, \gamma_1, M_1)$

$(L, \alpha_2, \gamma_2, M_2)$

definire:

$\alpha(l) = (\alpha_1(l), \alpha_2(l))$

$\gamma(m_1, m_2) = \gamma_1(m_1) \sqcap \gamma_2(m_2)$

determinare se la seguente è un'inserzione di Galois:

$(L, \alpha, \gamma, M_1 \times M_2)$

Soluzione

utilizzo le proprietà delle inserzioni:

$\alpha(l) = (m_1, m_2)$

$\Leftrightarrow \quad (\alpha_1(l), \alpha_2(l)) = (m_1, m_2)$

$\Leftrightarrow \quad (\alpha_1(l) = m_1) \wedge (\alpha_2(l) = m_2)$

$\Leftrightarrow \quad (l \sqsubseteq \gamma_1(m_1)) \wedge (l \sqsubseteq \gamma_2(m_2))$

$\Leftrightarrow \quad l \sqsubseteq (\gamma_1(m_1) \sqcap \gamma_2(m_2))$ *(questa è verificata dalla precedente)*

$\Leftrightarrow \quad l \sqsubseteq \gamma(m_1, m_2)$

dimostro che si tratta di una inserzione:

$\alpha(\gamma(m_1, m_2)) = (m_1, m_2)$

$\Rightarrow \quad \alpha(\gamma_1(m_1) \sqcap \gamma_2(m_2)) = (m_1, m_2)$

$\Rightarrow \quad (\alpha_1(\gamma_1(m_1)), \alpha_2(\gamma_2(m_2))) = (m_1, m_2)$

$\Rightarrow \quad \alpha_1(\gamma_1(m_1)) = m_1$ *(verifica le condizioni iniziali)*

$\Rightarrow \quad \alpha_2(\gamma_2(m_2)) = m_2$ *(verifica le condizioni iniziali)*

Esercizio 9

(vedi esercizio 4.20 pag 280 del libro di testo)

Let $(L_1, \alpha_1, \gamma_1, M_1)$ be a Galois connection and define

$\alpha(f) = \alpha_1 \circ f \circ \gamma_1$

$\gamma(g) = \gamma_1 \circ g \circ \alpha_1$

(in the manner of section 4.4). Do any of the following equalities

(1) $\alpha(\lambda l.l) = \lambda m.m$

(2) $\gamma(\lambda m.m) = \lambda l.l$

(3) $\alpha(f_1 \circ f_2) = \alpha(f_1) \circ \alpha(f_2)$

(4) $\gamma(g_1 \circ g_2) = \gamma(g_1) \circ \gamma(g_2)$

necessarily hold? Which of the equalities hold when $(L_1, \alpha_1, \gamma_1, M_1)$ is know to be a Galois insertion?

Soluzione

(1) $\alpha(\lambda l.l) = \lambda m.m \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \circ \lambda l.l \circ \gamma_1 = \lambda m.m \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \circ \gamma_1 = \lambda m.m$ *questa condizione è necessaria per una inserzione di Galois, per una generica connessione è sufficiente la relazione* $\sqsubseteq$

(2) $\gamma(\lambda m.m) = \lambda l.l \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \circ \lambda m.m \circ \alpha_1 = \lambda l.l \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \circ \alpha_1 = \lambda l.l$ *è sufficiente la relazione* $\sqsubseteq$ *perché sia una connessione di Galois.*

(3) $\alpha(f_1 \circ f_2) = \alpha(f_1) \circ \alpha(f_2)$

applico la funzione γ *ad entrambe i membri dell'equazione:*

$\gamma(\alpha(f_1 \circ f_2)) = \gamma(\alpha(f_1) \circ \alpha(f_2)) \quad \Rightarrow$ *sostituisco con le definizioni date:*

$\gamma(\alpha_1 \circ f_1 \circ f_2 \circ \gamma_1) = \gamma(\alpha_1 \circ f_1 \circ \gamma_1 \circ \alpha_1 \circ f_2 \circ \gamma_1) \quad \Rightarrow$

$(\gamma_1 \circ \alpha_1) \circ f_1 \circ f_2 \circ (\gamma_1 \circ \alpha_1) = (\gamma_1 \circ \alpha_1) \circ f_1 \circ (\gamma_1 \circ \alpha_1) \circ f_2 \circ (\gamma_1 \circ \alpha_1)$

quest'ultima uguaglianza è vera solo se $(\gamma_1 \circ \alpha_1 = \lambda l.l)$ *che ci riporta al caso (2).*

(4) $\gamma(g_1 \circ g_2) = \gamma(g_1) \circ \gamma(g_2)$

applico la funzione α *ad entrambe i membri dell'equazione:*

$\alpha(\gamma(g_1 \circ g_2)) = \alpha(\gamma(g_1) \circ \gamma(g_2)) \quad \Rightarrow$ *sostituisco con le definizioni date:*

$\alpha(\gamma_1 \circ g_1 \circ g_2 \circ \alpha_1) = \alpha(\gamma_1 \circ g_1 \circ \alpha_1 \circ \gamma_1 \circ g_2 \circ \alpha_1) \quad \Rightarrow$

$(\alpha_1 \circ \gamma_1) \circ g_1 \circ g_2 \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1) = (\alpha_1 \circ \gamma_1) \circ g_1 \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1) \circ g_2 \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1)$

quest'ultima uguaglianza è vera solo se $\alpha_1 \circ \gamma_1 = \lambda m.m$ *che ci riporta al caso (1).*

Esame di Informatica Teorica – 2006-01-18

Esercizio 1

Considerate il seguente programma:

```
[y=a]; [z=b]; if [y<=0] then [z=1] else (while [y>0] do ([y=y-1];[z=z·b]))
```

Dovete etichettarlo e quindi dire:

- Quali sono init, final e flow?
- Disegnate il reticolo per l'analisi Reaching Definition del programma
- Effettuate l'analisi Reaching Definition del programma

Soluzione

$[y=a]^1$; $[z=b]^2$; if $[y<=0]^3$ then $[z=1]^4$ else (while $[y>0]^5$ do ($[y=y-1]^6$;$[z=z\cdot b]^7$))

$labels(S_*)$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$init(S_*)$ = 1

$final(S_*)$ = {4, 5}

$flow(S_*)$ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (7, 5), (5, 6), (6, 7)}

$\mathbf{Var}_*$ = {a, b, y, z}

$\mathbf{AExp}_*$ = {(y-1), (z·b)}

$\mathbf{BExp}_*$ = {(y <= 0), (y > 0)}

$P(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?)$ = {(a, ?), (b, ?), (y, ?), (y, 1), (y, 6), (z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}

reticolo: $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top) = (P(\mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_* \times \mathbf{Lab}_*^?)$

Reaching Definitions Analysis

l	$kill_{RD}(l)$	$gen_{RD}(l)$	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(y, ?), (y, 1), (y, 6)}	{(y, 1)}	{(a, ?), (b, ?), (y, ?), (z, ?)}	{(a, ?), (b, ?), (y, ?), (z, ?)} \ {(y, ?), (y, 1), (y, 6)}) ∪ {(y, 1)}
2	{(z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}	{(z, 2)}	$RD_{exit}(1)$	($RD_{exit}(1)$ \ {(z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}) ∪ {(z, 2)}
3	∅	∅	$RD_{exit}(2)$	($RD_{exit}(2)$ \ ∅) ∪ ∅
4	{(z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}	{(z, 4)}	$RD_{exit}(3)$	($RD_{exit}(3)$ \ {(z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}) ∪ {(z, 4)}
5	∅	∅	$RD_{exit}(3) \cup RD_{exit}(7)$	($RD_{exit}(3) \cup RD_{exit}(7)$ \ ∅) ∪ ∅
6	{(y, ?), (y, 1), (y, 6)}	{(y, 6)}	$RD_{exit}(5)$	($RD_{exit}(5)$ \ {(y, ?), (y, 1), (y, 6)}) ∪ {(y, 6)}
7	{(z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}	{(z, 7)}	$RD_{exit}(6)$	($RD_{exit}(6)$ \ {(z, ?), (z, 2), (z, 4), (z, 7)}) ∪ {(z, 7)}

l	$RD_{entry}(l)$	$RD_{exit}(l)$
1	{(a, ?), (b, ?), (y, ?), (z, ?)}	{(a, ?), (b, ?), (z, ?), (y, 1)}
2	{(a, ?), (b, ?), (z, ?), (y, 1)}	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (z, 2)}
3	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (z, 2)}	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (z, 2)}
4	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (z, 2)}	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (z, 4)}
5	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (y, 6), (z, 4), (z, 7)}	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (y, 6), (z, 4), (z, 7)}
6	{(a, ?), (b, ?), (y, 1), (y, 6), (z, 4), (z, 7)}	{(a, ?), (b, ?), (y, 6), (z, 4), (z, 7)}
7	{(a, ?), (b, ?), (y, 6), (z, 4), (z, 7)}	{(a, ?), (b, ?), (y, 6), (z, 7)}

Esercizio 2

Dato un reticolo $(L, \sqsubseteq)$, un upper bound operator U:LxL→L è un operatore tale che $l_1 \sqsubseteq (l_1 \breve{U}\, l_2) \sqsupseteq l_2$

Dimostrate che se $(L, \sqsubseteq)$ soddisfa l'Asceding Chain Condition allora ∇ è un operatore di widening se e solo se è un upper bound operator.

(suggerimento: Un operatore di widening ∇ è un upper bound operator tale che per tutte le catene ascendenti $(l_n)_n$ la catena $(l_n^{\nabla})_n$ stabilizza e $l_i^{\nabla} = l_i \nabla l_{i-1}^{\nabla}$)

Soluzione

Un upper bound operator deve soddisfare le seguenti condizioni:

(1) $l_1 \sqsubseteq (l_1 \breve{U}\, l_2)$

(2) $l2 \sqsubseteq (l_1 \breve{U}\, l_2)$

Se è valida la ascending chain condition, allora:

$l_n^{\nabla} \sqsubseteq l_{n+1}^{\nabla}$

che possiamo riscrivere come:

$l_n^{\nabla} \sqsubseteq l_n^{\nabla} \nabla l_{n+1}$ (*questa verifica la* (1))

dato che: $l_n^{\nabla} \sqsupseteq \sqcup\{l_0, l_1, ..., l_n\}$

e che : $l_n^{\nabla} \nabla l_{n+1} \sqsupseteq \sqcup\{l_0, l_1, ..., l_n, l_{n+1}\}$

per soddisfare l'ascending chain condition:

$\sqcup\{l_0, l_1, ..., l_n, l_{n+1}\} \sqsupseteq l_{n+1}$

se maggiorimao il primo termine abbiamo che:

$l_n^{\nabla} \nabla l_{n+1} \sqsupseteq l_{n+1}$ (*questa verifica la* (2))

pertanto ∇ dovrà necessariamente essere un operatore di upper bound.

Esercizio 3

Considerate i reticoli $P(Z\cup\{-\infty,+\infty\})$ ordinato per inclusione, $Z\cup\{-\infty,+\infty\}$ ordinato per $\leq$, e Interval i cui elementi sono $[a,b]$, $a,b \in Z\cup\{-\infty,+\infty\}$ ordinato nel seguente modo: $[a,b] \leq [a',b']$ se e solo se $a\leq a'$ e $b\leq b'$.

Verificate che ($P(Z\cup\{-\infty,+\infty\})$, $\dot{\alpha}1$, $\gamma1$, Interval) e ($P(Z\cup\{-\infty,+\infty\})$, $\dot{\alpha}2$, $\gamma2$, $Z\cup\{-\infty,+\infty\}$) dove $\dot{\alpha}1(A)=[\min(A),\max(A)]$, $\gamma1([a,b])= \{y|a\leq y\leq b\}$, $\dot{\alpha}2(A)=\max(A)$ e $\gamma2(a)= \{y|\ y\leq a\}$, sono due connessioni di Galois e trovate la connessione di Galois (Interval, $\dot{\alpha}$, γ, $Z\cup\{-\infty,+\infty\}$) tale che composta con ($P(Z\cup\{-\infty,+\infty\})$, $\dot{\alpha}1$, $\gamma1$, Interval) dia la connessione ($P(Z\cup\{-\infty,+\infty\})$, $\dot{\alpha}2$, $\gamma2$, $Z\cup\{-\infty,+\infty\}$).

(n.b. nella prima connessione c'è un errore nel testo, in quanto la prima $\dot{\alpha}$ o γ non è monotona.)

Esame di Informatica Teorica – 2006-02-23

Tabelle necessarie: 2.4 (pag. 50), 3.5 (pag. 170).

Esercizio 1

Considerate il seguente programma:

```
[y := a] ;
[z := b] ;
[y := z+y] ;
if [y <= 0] then [z := 1]
            else (while [y > 0] do ([y := y – 1] ; [z := z * b]))
```

Dovete etichettarlo e quindi dire:

- Quali sono init, final e flow?
- Dite come è fatto il reticolo per l'analisi "live variables" del programma (dite in particolare quali sono gli elementi, il top ed il bottom del reticolo).
- Effettuate l'analisi "live variables" del programma.

Soluzione

$[y := a]^1$; $[z := b]^2$; $[y := z+y]^3$; if $[y <= 0]^4$ then $[z := 1]^5$
else (while $[y > 0]^6$ do ($[y := y - 1]^7$; $[z := z * b]^8$))

labels(S)* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

init(S)* = 1

final(S)* = {5, 6}

$flow^R(S_*)$ = {(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 4), (7, 6), (6, 8), (8, 7)}

$\mathbf{Var}_*$ = {a, b, y, z}

$(L, \sqsubseteq, \sqcup, \bot, \top) = (P(\mathbf{Var}_*), \subseteq, \cup, \emptyset, \mathbf{Var}_*)$

Live Variables Analysis

l	$kill_{LV}(l)$	$gen_{LV}(l)$	$LV_{exit}(l)$	$LV_{entry}(l)$	$LV_{exit}(l)$	$LV_{entry}(l)$
1	{y}	{a}	$LV_{entry}(2)$	$(LV_{entry}(2) \setminus \{y\}) \cup \{a\}$	{b, y}	{a, b}
2	{z}	{b}	$LV_{entry}(3)$	$(LV_{entry}(3) \setminus \{z\}) \cup \{b\}$	{y, z}	{b, y}
3	{y}	{y, z}	$LV_{entry}(4)$	$(LV_{entry}(4) \setminus \{y\}) \cup \{y, z\}$	{y}	{y, z}
4	∅	{y}	$LV_{entry}(5) \cup LV_{entry}(6)$	$(LV_{entry}(5) \cup LV_{entry}(6) \setminus \emptyset) \cup \{y\}$	{y}	{y}
5	{z}	∅	∅	$(\emptyset \setminus \{z\}) \cup \emptyset$	∅	∅
6	∅	{y}	∅	$(\emptyset \setminus \emptyset) \cup \{y\}$	∅	{y}
7	{y}	{y}	$LV_{entry}(8)$	$(LV_{entry}(8) \setminus \{y\}) \cup \{y\}$	{b, y, z}	{b, y, z}
8	{z}	{z, b}	$LV_{entry}(6)$	$(LV_{entry}(6) \setminus \{z\}) \cup \{z, b\}$	{y}	{b, y, z}

Esercizio 2

Dato il reticolo (A, $\sqsubseteq$), con A = *P*($\{1\}^*$) (l'insieme di sottoinsiemi di parole sull'alfabeto {1}, sottoinsiemi che possono includere la parola vuota λ), ed il reticolo dei sottoinsiemi di {dispari, pari, 0}, stabilite una connessione di Galois tra i due reticoli tale che α({λ}) = {0}, α({1, 111, 11111}) = {dispari} e α({1, 11}) = {dispari, pari}.

Dimostrate che le α e γ che introducete formano una connessione di Galois.

Soluzione

Connessione di Galois: (A, α, γ, B)

Reticoli:

$(A, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top) = (A, \subseteq, \cup, \cap, \emptyset, \{1\}^*)$

$(B, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top) = (B, \subseteq, \cup, \cap, \{0\}, \{0, \text{dispari}, \text{pari}\})$

***Funzione di astrazione* α:**

α: A → B

posto: a ∈ A ; x ∈ a (*a è un sottoinsieme di elementi di* A*,* x *è un singolo elemento di* a*)*

α'(x) =	{0}	se	x = λ	
	{dispari}	se	$n_x \bmod 2 \neq 0$	(x *ha un numero di elementi* n_x *dispari*)
	{pari}	se	$n_x \bmod 2 = 0$	(x *ha un numero di elementi* n_x *pari*)

α(a) = ∪{α'(x)}

***Funzione di concretizzazione* γ:**

γ: B → A

posto: b ∈ B ; y ∈ b (*b è un sottoinsieme di elementi di* B*,* y *è un singolo elemento di* b*)*

γ'(y) =	{λ}	se	y = 0
	$\{1(11)^*\}^+$	se	y = dispari
	$\{(11)^+\}^+$	se	y = pari

γ(b) = ∪{γ'(y)}

NOTA: *i simboli * e + utilizzati come apici assumono il significato che hanno in una regular expression: * = il contenuto tra le parentesi si ripete zero o più volte; + = il contenuto tra le parentesi si ripete una o più volte. Fa eccezione* $\{1\}^*$ *che assume il significato descritto nel testo dell'esercizio.*

Dimostriamo che* (A, α, γ, B) *è una "adjunction" e quindi anche una connessione di Galois:

α *e* γ *sono funzioni totali perché, per costruzione, ad ogni elemento del dominio di una corrisponde un elemento del codominio dell'altra.*

Verifichiamo le seguenti condizioni:

$\alpha(a) \sqsubseteq b \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(a) \subseteq b$

il valore più grande che può assumere α(a) *è* {0, dispari, pari} *che corrisponde al* ⊤ *di* B*, pertanto la condizione è verificata.*

$a \sqsubseteq \gamma(b) \qquad \Rightarrow \qquad a \subseteq \gamma(b)$

il valore più grande che può assumere γ(b) *è dato dalla parola vuota* λ *più la totalità di parole* dispari *e* pari*, pertanto* γ(b) *include qualsiasi combinazione di parole di* a*, compresa la parola vuota* λ*.*

Esercizio 3

Considerate il seguente programma:

$(\mathtt{let}\ f = (\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1})^{2}\ \mathtt{in}\ ((f^{3}\ (\mathtt{fn}\ y \Rightarrow (y^{4} + 1^{5})^{6})^{7})^{8} + 1^{9})^{10})^{11};$

Dite se la seguente soluzione è ammissibile o no, e nel caso non lo sia quale è una soluzione ammissibile che estende questa, mentre se lo fosse dite se è secondo voi la più piccola e perché.

1	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1},\ \mathtt{fn}\ y \Rightarrow (y^{4} + 1^{5})^{6}\}$
2	$\emptyset$
3	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1}\}$
4	$\emptyset$
5	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1}\}$
6	$\emptyset$
7	$\emptyset$
8	$\emptyset$
9	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1},\ \mathtt{fn}\ y \Rightarrow (y^{4} + 1^{5})^{6}\}$
10	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1},\ \mathtt{fn}\ y \Rightarrow (y^{4} + 1^{5})^{6}\}$
11	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1},\ \mathtt{fn}\ y \Rightarrow (y^{4} + 1^{5})^{6}\}$
f	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1},\ \mathtt{fn}\ y \Rightarrow (y^{4} + 1^{5})^{6}\}$
x	$\emptyset$
y	$\{\mathtt{fn}\ x \Rightarrow x^{1}\}$

Soluzione

`(let f = (fn x => x¹)² in ((f³ (fn y => (y⁴ + 1⁵)⁶)⁷)⁸ + 1⁹)¹⁰)¹¹;`

Trovo i vincoli (constraints) utilizzando la tabella 3.5 di pag 170 del libro PPA (allegata al compito d'esame).

[let]

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s (\text{fn } x \Rightarrow x^1)^2$

[fn]

[1] $\{\text{fn } x \Rightarrow x^1\} \subseteq \hat{C}(2)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s x^1$

[var]

[2] $\hat{\rho}(x) \subseteq \hat{C}(1)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s ((f^3 (\text{fn } y \Rightarrow (y^4 + 1^5)^6)^7)^8 + 1^9)^{10}$

[op]

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s (f^3 (\text{fn } y \Rightarrow (y^4 + 1^5)^6)^7)^8$

[app]

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s f^3$

[var]

[3] $\hat{\rho}(f) \subseteq \hat{C}(3)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s (\text{fn } y \Rightarrow (y^4 + 1^5)^6)^7$

[fn]

[4] $\{\text{fn } y \Rightarrow (y^4 + 1^5)^6\} \subseteq \hat{C}(7)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s (y^4 + 1^5)^6$

[op]

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s y^4$

[var]

[5] $\hat{\rho}(y) \subseteq \hat{C}(4)$

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s 1^5$ ← *[con] sempre verificata*

$(\hat{C}, \hat{\rho}) \vDash_s 1^9$ ← *[con] sempre verificata*

[6] $\hat{C}(2) \subseteq \hat{\rho}(f)$

[7] $\hat{C}(10) \subseteq \hat{C}(11)$

controllo l'ammissibilità :

vincoli		*(ˆC, ˆρ)* *(soluzione data – non ammissibile)*	*(ˆC'', ˆρ'')* *(soluzione estesa - ammissibile)*
[2]	1	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}
[1][6]	2	∅	{fn x => x^1}
[3]	3	{fn x => x^1}	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}
[5]	4	∅	{fn x => x^1}
	5	{fn x => x^1}	{fn x => x^1}
	6	∅	∅
[4]	7	∅	{fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}
	8	∅	∅
	9	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}
[7]	10	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}
[7]	11	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}
[3][6]	f	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}	{fn x => x^1, fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}}
[2]	x	∅	∅
[5]	y	{fn x => x^1}	{fn x => x^1}

La violazione del vincolo [1] è sufficiente per dire che la soluzione non è ammissibile.

Estendo quindi la soluzione data perché sia ammissibile.

Costruisco una soluzione minima ammissibile (non richiesto):

ordine di costruzione	*vincoli*		*(ˆC, ˆρ)*
5	[2]	1	∅
1	**[1]**[6]	2	{fn x => x^1}
4	**[3]**	3	{fn x => x^1}
7	[5]	4	∅
-	-	5	∅
-	-	6	∅
2	**[4]**	7	{fn y => $(y^4 + 1^5)^6$}
-	-	8	∅
-	-	9	∅
10	**[7]**	10	∅
9	[7]	11	∅
3	[3]**[6]**	f	{fn x => x^1}
6	**[2]**	x	∅
8	**[5]**	y	∅

In assenza di vincoli, scelgo l'insieme più piccolo, ovvero quello vuoto.