

# GUIDA ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DI MECCANICA RAZIONALE

## Gradi di libertà del sistema:

Il numero di variabili indipendenti (coordinate libere) indica i gradi di libertà del sistema.

## Baricentro di figure piane:

$$x_G = (\iint_D \sigma x \, dx \, dy) / (\iint_D \sigma \, dx \, dy)$$

$$y_G = (\iint_D \sigma y \, dx \, dy) / (\iint_D \sigma \, dx \, dy)$$

Dove  $\sigma$  è la densità di massa.

## Matrice d'inerzia:

Momento d'inerzia rispetto ad un asse:

$$I = \iint_D \sigma \delta^2 \, dx \, dy \quad \text{dove } \delta \text{ è la distanza delle masse dall'asse e } \sigma \text{ la densità di massa.}$$

Per il calcolo del momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello baricentrico si sfrutta il teorema di Steiner:  $I_A = I_G + m d^2$

La matrice d'inerzia è diagonale se gli assi sono principali d'inerzia ovvero:

$$I_o = \text{diag}(I_{11(x)}, I_{22(y)}, I_{33(z)})$$

La matrice d'inerzia è additiva e simmetrica.

Per calcolare la matrice d'inerzia rispetto ad un altro punto si sfrutta il teorema di Huyghens-Steiner:

$$I_{o,jk} = I_{g,jk} + m(d_j^2 \delta_{jk} - d_j d_k)$$

dove:  $\delta_{jk}$  è di Kronecker ( $j=k \Rightarrow 1$ ;  $j \neq k \Rightarrow 0$ );

$d$  è la distanza tra G ed O;

$d_j$  ( $d_k$ ) è la distanza dal punto G al punto O lungo l'asse j (k).

## Energia Cinetica:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_o^2 + M \mathbf{v}_o \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_o)] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_o(\boldsymbol{\omega})$$

(O solidale)

Nota:  $\omega = \theta'$ ;  $v_i = x_i'^2 + y_i'^2$

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}) = I_1 \omega_1 \mathbf{k}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{k}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{k}_3$$

L'energia cinetica è additiva, per cui si sommano i contributi rotazionali e traslazionali di ogni componente del sistema (aste, dischi, ecc.).

Scegliendo rotazioni e traslazioni rispetto al centro di massa o rispetto a poli solidali e fissi, l'espressione dell'energia cinetica si semplifica notevolmente.

## Energia Potenziale:

Si sommano tutte le energie potenziali generate dalle forze attive presenti nel sistema:

- per una molla  $V = \frac{1}{2} K S^2$  dove S è la lunghezza della molla;

- per una generica forza  $V = F \cdot d$  dove d è la distanza dal punto di applicazione della forza all'asse perpendicolare alla retta d'azione della forza.

Essendo  $V = -L$  le forze andranno prese positive quando il loro verso sarà discorde dal verso degli assi, viceversa andranno prese negative. Sarà inoltre necessario esprimere le distanze in funzione delle coordinate libere in modo tale da tener conto del loro segno.

**Lagrangiana:**  $L = T - V$

## Equazioni differenziali del moto:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_1'} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] = 0$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_2'} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] = 0$$

## Punti di equilibrio del sistema:

Sono i punti per cui si annullano le derivate parziali dell'energia potenziale rispetto alle coordinate libere (punti di massimo e minimo dell'energia potenziale).

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial q_1} \right] = 0$$

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial q_2} \right] = 0$$

## Stabilità:

Affinché i punti di equilibrio siano stabili occorre che siano punti di minimo per l'energia potenziale, ovvero devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0$$

$$H = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right) - \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right]^2 > 0$$

## Integrali primi:

- Se  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = q_k' \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k'} \right] - L = \text{Costante}$   
(Hamiltoniana o integrale primo di Jacobi)

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo allora:

$$H = T + V = E = \text{Costante}$$

- Se  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k'} = \text{Costante}$   
(Momento cinetico)

Le costanti si calcolano sostituendo le condizioni iniziali.

## Reazioni vincolari: $\phi$

Si usano le equazioni cardinali della statica.

- *Forze:*

Si sommano le forze attive e reattive del sistema e si eguagliano alle masse dei componenti del sistema per le rispettive accelerazioni dei centri di massa.

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(r)}$$

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{F} + \boldsymbol{\phi}$$

- *Momenti delle forze:*

$$\mathbf{M}_o^{(e)} = \mathbf{M}_o^{(a)} + \mathbf{M}_o^{(r)}$$

$$\mathbf{M}_o^{(e)} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}') + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}) + m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{a}_o$$

$$\mathbf{M}_o^{(r)} = \sum_{q,1,S} (\mathbf{A}_q - \mathbf{O}) \wedge \boldsymbol{\phi}_q$$

$$\mathbf{M}_o^{(a)} = \sum_{i,1,N} (\mathbf{B}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i$$

## Momento Angolare:

Il momento angolare totale del sistema si calcola sommando i momenti angolari dei singoli componenti del sistema.

$$\mathbf{L}_o = m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{v}_o + \mathbf{I}_o(\boldsymbol{\omega}); \quad (\text{O solidale})$$

$$\mathbf{L}_A = m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \times \mathbf{v}_G + \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}); \quad (\text{A non solidale})$$

## Legge di distribuzione delle velocità:

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_o)$$

## Forze esterne:

$$\mathbf{R}^{(e)} = m \{ \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_o) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_o)] \}$$